Cours 10.1

19.11.24

NB: Test intermédiaire jeudi de 16h15 à 17h15 en salles d'exo

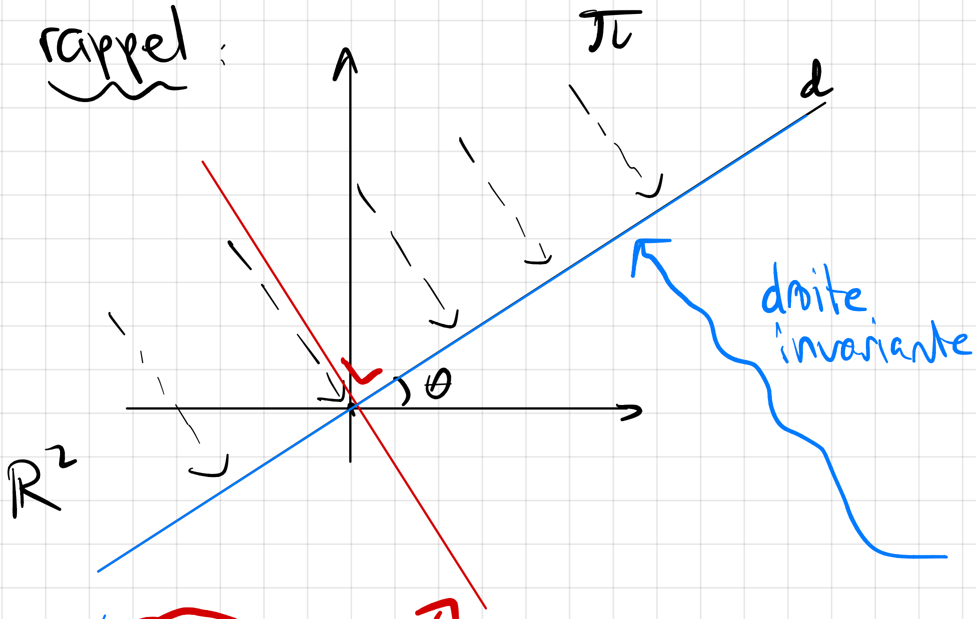
(⇝ votre numéro sur la liste .csv sur Moodle)

1h : 16 questions / 8 VF, 8 QCM

Exemples 5.1.6 (suite) (valeurs propres) ("géométriquement")

4) Projections (dans $\mathbb{R}^2$)

rappel :



$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

projection (orthogonale) sur d

2 valeurs propres

$\lambda = 1$

$E_1 =$ l'espace propre associé à 1 = la droite d

$\lambda = 0$

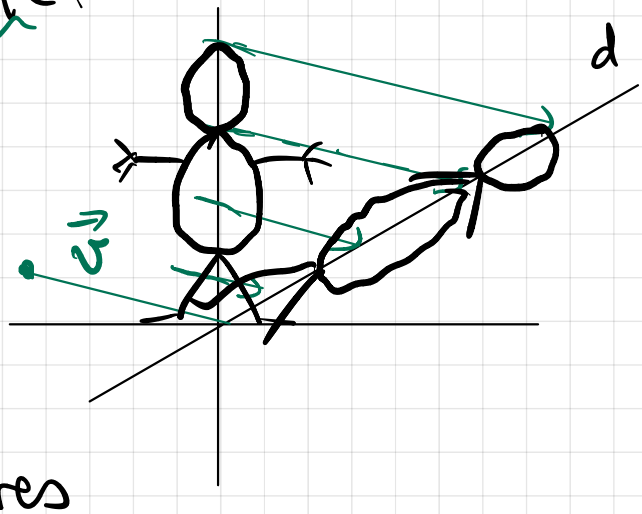
$E_0 =$ la droite "perpendiculaire" à d passant par (0,0)

$= \mathrm{Ker}(\pi)$

+ généralement on peut projeter le long d'un vecteur v

projection oblique :

$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



2 valeurs propres

$\lambda = 1$ $\qquad E_1 = d = \mathrm{Im}(\pi)$

$\lambda = 0$ $\qquad E_0 = \mathrm{vect}\{\vec{v}\} = \mathrm{Ker}(\pi)$.

5) cas général (projecteur)

soit $P : V \to V$ linéaire telle que

$P \circ P = P$ (exemple : les projections ci-dessus)

(on l'appelle un projecteur de V)

alors les valeurs propres de P sont $\in \{0, 1\}$

$(P^2 = P)$

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

une val. propre de P

alors $\exists v \in V \setminus \{0_V\}$ t.q $Pv = \lambda v$

$$\Big\downarrow P$$

$$P(Pv) = P(\lambda v)$$

$$\Big\downarrow$$

$$P^2 v = \lambda P v$$

$$\Big\downarrow P^2 = P$$

$$Pv = \lambda P v$$

$\Big\downarrow$ v vect. propre associé à λ

$$\lambda v = \lambda^2 v$$

$$\Big\downarrow$$

$$(\lambda^2 - \lambda) v = 0$$

$$\Big\downarrow v \neq 0$$

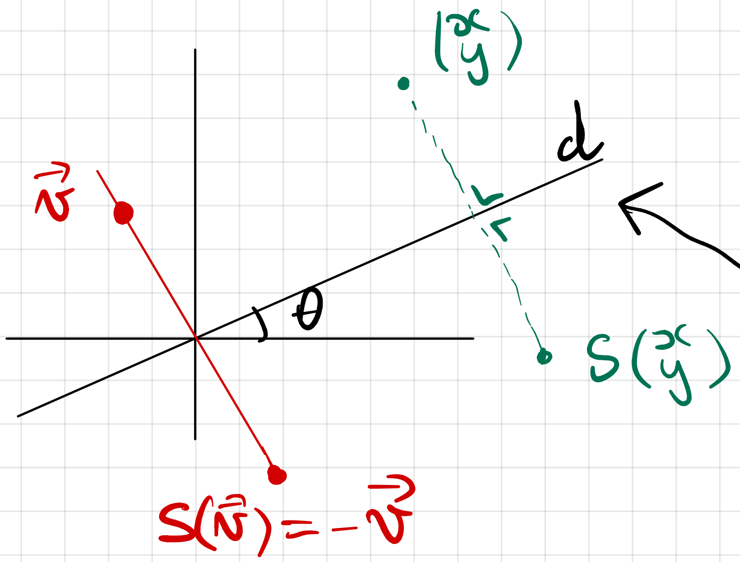
$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda \in \{0, 1\}$$

<u>exo</u> : vérifiez que $P = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$

satisfait $P^2 = P$

6) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ symétrie (orthogonale) par rapport à une droite d (passant par l'origine)



2 valeurs propres :

$\lambda = 1$

$E_1 = d$

$\lambda = -1$

$E_{-1} = \text{vect}\{\vec{v}\}$

où $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à d

Rem : $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^2}$

$s^2 = Id$

7) Plus général si $s : V \to V$ linéaire vérifiant $s^2 = Id_V$ (on appelle cela une symétrie)

alors si λ est val. propre de s

alors $\lambda \in \{\pm 1\}$

en effet si $sv = \lambda v$ alors $s^2 v = s(\lambda v)$

s linéaire

or $S^2 = Id_V$

donc $v = S^2(v) = \lambda S(v) = \lambda^2 v$

$\Rightarrow (\lambda^2 - 1) v = 0_V$

et $v \neq 0$ (car vecteur propre)

$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$

(!) $Id_V : V \to V$ est une symétrie et sa seule val. propre est 1.

(!) $-Id_V : V \to V$, $v \mapsto -v$ a pour seule val propre -1.

8) Soit $D : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, $p(t) \mapsto p'(t) = D(p)$ ($n \in \mathbb{N}$ fixé) $n \geq 1$

(D est linéaire $\Rightarrow$ Analyse I)

$\text{Im}(D) = ? = \mathbb{P}_{n-1}$

$\text{Ker}(D) = ? = E_0 = \{p(t) \in \mathbb{P}_n \mid p'(t) = 0\}$

$= \{c \in \mathbb{R}\}$ = pol. constants.

et il n'y a pas d'autres val. prop.

car $\quad p'(t) = \lambda p(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

(aec $\lambda \in \mathbb{R}$)

si $\lambda \neq 0$ on aurait égalité entre pol. de degré différents

<u>Rem</u> : L. Euler $\qquad V = D(\mathbb{R})$ = espace des fonctions dérivables

$$D : V \to V$$
$$f \mapsto D(f) = f'(t)$$

alors $\quad D(e^t) = e^t$

et donc $\lambda = 1$ est val. propre de D

$$D(e^{2t}) = 2e^{2t}$$

donc 2 est aussi val. propre.

⋮

$\forall \mu \in \mathbb{R}$ est val. propre de D.

9) $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$

et $\quad T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ <u>linéaire</u>

$$A \mapsto A^T$$

que sont les valeurs propres de T ?

En fait $T \circ T = Id_{M_{n \times n}(\mathbb{R})}$ $\quad ((A^T)^T = A)$

et donc T est une symétrie

$\Rightarrow$ seuls val. propres possibles $\lambda = \pm 1$

$E_1 = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = A \}$ = espace des matrices symétriques

(ex : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ fibonacci)

$\dim(E_1) = \dim\begin{pmatrix} \text{matrices} \\ \text{symétriques } 2\times 2 \end{pmatrix} = 3$)

$E_{-1} = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A \}$ = espace des matrices anti-symétriques

(ex : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$))

$\dim(E_{-1}) = 1$

Pin ex. 5.1.6

Q? Comment trouver les val. propres de T ?

§5.2 Polynôme caractéristique

<u>Déf. 5.2.1</u> : Soit $T: V \to V$ linéaire et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ordonnée de V

Posons $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, alors on définit le <u>polynôme caractéristique de T</u>, comme

$$\boxed{c_T(t) = \det(A - tI_n)}$$

Pour $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, on pose

$$\boxed{c_A(t) = \det(A - \underbrace{t}_{t = \text{variable}} I_n)}$$

<u>Rem 5.2.2</u> : Si $\mathcal{C}$ est une autre base de V et $B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ alors

$$\det(A) = \det(B)$$

et $$c_A(t) = c_B(t)$$

Morale : le choix de la base ne change pas le polynôme caract.

Théorème 5.2.3 (Pol. carach. & val. propres)

Soit $T : V \to V$ lin. $\mathcal{B}$ b.o. de V ($\dim V = n$)

et $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Alors

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence :

λ est valeur propre de T (de A)

$\Leftrightarrow$ λ est racine du poly. carach. $c_T(t)$
(zéro) ($c_A(t)$)

2) $c_T(t) = \det(A - tI_n)$ est un polynôme

de degré $n = \dim V$

plus précisément :

$$c_T(t) = c_A(t) = (-1)^n (t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0)$$

avec $c_0 = (-1)^n \det(A)$

$c_{n-1} = -\mathrm{Tr}(A)$

3) T possède au maximum n valeurs propres (distinctes réelles)

Notation : $Spc(T) = Spc(A)$

$=$ le spectre (réel) de T (de A)

$=$ l'ensemble de toutes les valeurs propres réelles de A

4) $Spc(A) = Spc(A^T)$

donc A et A^T ont mêmes valeurs propres

⚠ mais pas forcément les mêmes espaces propres

ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Spc(A) = Spc(A^T) = \{0\}$

$E_0^A = Ker(A) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$E_0^{A^T} = Ker(A^T) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

5) Soit $\lambda \in Spc(A) = Spc(T)$

(et donc $c_A(\lambda) = 0$)

On a que le polynôme $(t-\lambda)$ divise $c_A(t)$ et on appelle <u>la multiplicité (algébrique) de λ</u> est le plus grand entier $m_\lambda \in \mathbb{N}$

t.q $\quad c_A(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda} q(t)$

où $q(t)$ est un polynôme (de degré $n - m_\lambda$) tel que $q(\lambda) \neq 0$

<u>Propriété de m_λ</u> :

$$1 \leq \boxed{\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda} \leq n = \dim V$$

(car $\dim(E_\lambda) \neq 0$ car $E_\lambda \neq \{0\}$)

càd la multiplicité algébrique de λ est supérieure ou égale à <u>la dimension de l'espace propre associé à λ</u>

(aka la multiplicité géométrique de λ)

(Fin Thm 5.2.3)

Exemples 5.2.4

1) $T : V \to V$ linéaire $\quad \dim V = 2 \quad \mathcal{B} = (b_1, b_2)$

$$A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$c_T(t) = c_A(t) = \det(A - tI_2)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$$

$$= (a-t)(d-t) - bc$$

$$= t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

$$\boxed{c_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)}.$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_A(t) = \det(A - tI_4) = \det\begin{pmatrix} 5-t & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-t & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-t & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

propriété du det

$$\overset{\text{propriété du det}}{=} (5-t)^2(3-t)(1-t)$$

Thm

$\Rightarrow \mathrm{Spc}(A) = \{1, 3, 5\}$

1, 3 valeurs propres "simples"

5 val. propre "double"

Rem : si on développe on trouve

$$c_A(t) = t^4 - 14t^3 + 68t^2 - 130t + 75$$

fortement déconseillé.